نظرية القيمة المتوسطة وتطبيقاتها

سعاد نوح زقوط
قسم الرياضيات– كلية التربية – جامعة مصراتة
s.zaqqout@edu.misuratau.edu.ly

الملخص

تدرس هذه الورقة البحثية إحدى أهم النظريات الأساسية في علوم الرياضيات، وتتمثل في نظرية القيمة المتوسطة، وتقتصر على دراسة نظرية القيمة المتوسطة وتوضيح أهم تطبيقاتها في علم التفاضل فقط من خلال التعريفات والمبرهنات مع توضيح مثال أو أكثر لكل تطبيق.

كلمات مفتاحية: القيمة المتوسطة، التفاضل و التكامل، التحليل الحقيقي.

Mean Value Theorem and it's Applications

Abstract

This research paper studies one of the basic theories in Calculus and Real analysis and it is represented in Mean value theorem and here we will just study it and show its importance and applications in differential science only, through definitions and clarifying one example or more of each application.
Keywords: mean value, theorem, math, calculus, real analysis.

المقدمـــة

تعتبر نظرية القيمة المتوسطة إحدى الركائز الأساسية في علوم الرياضيات، وخاصة علوم التفاضل والتكامل والتحليل الحقيقي، حيث وصفها أحد العلماء الرياضيين بأنها ذئب في ثوب حمل، وتدرس هذه النظرية سلوك قيمة ما خلال فترة معينة وكيفية استخدامها في عدة تطبيقات درسنا هنا أهم تلك التطبيقات، والمتمثلة في إيجاد الحسابات التقريبية للحصول على تقييم دقيق للخطأ، وتعيين مواقع جذور

دالة ، كذلك لأثبات قواعد لوبيتال لحساب صيغ غير محددة. ايضا توسيع أو تمديد متباينات معروفة للقيم الصحيحة أو القياسية إلى القيم الحقيقية وتكوين المتباينات.

1. نظرية القيمة المتوسطة

يمكن تعريف المشتقة بشكل أكبر تعميما، باعتبار أن النقطة التي تكون عندها الدالة قابلة للاشتقاق هي نقطة تجميع (تراكم) لنطاق الدالة f .

تعريف 1.1

لتكن c نقطة تراكم لنطاق الدالة f ، $c \in D$ ، نقول أن العدد الحقيقي L هو مشتقة الدالة f عند النقطة c إذا كان يوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ لكل $\varepsilon > 0$ بحيث أنه إذا كانت $x \in D$ و $0 < |x - c| < \delta$ ، فإن $\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - L\right| < \varepsilon$:

حيث ان $\acute{f}(c) = L$ ،ويكون $\acute{f}\ (c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ حيث $x \in D, x \neq c$

يعتبر اتصال الدالة شرطاً ضرورياً لوجود المشتقة عند النقطة c ، لكنه غير كاف كما وضح ذلك عالم الرياضيات، فيرشتراس بمثاله الذى هز به وسط الرياضيات والمتمثل في أن

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$ متصلة عند أى نقطة و لا توجد لها مشتقة في نقطة .

نلاحظ أنه إذا كانت c نقطة داخلية للنطاق D ، فإن x تقع على يمين و يسار c ، اما إذا كانت D فترة ، و c حدية يسرى لـ D ، فإن x تقع على يمين النقطة c فقط.

مبرهنة 1.1

إذا كانت للدالة f مشتقة عند c ، فإن f تكون متصلة عند c.

مبرهنة 2.1

1)إذا كانت $\acute{f}(c) > 0$ فإنه يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث أنه إذا كانت $c < x < c + \delta$ ، فإن $f(c) < f(x)$.

2)إذا كان $\acute{f}(c) < 0$ ، فإنه يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث أنه إذا كانت $x \in D$

و $c-\delta<x<c$ ، فإن $f(x)$ ، $f'(c)$.

تعريف 2.1 النهاية العظمى النسبية والنهاية الصغرى النسبية

يكون للدالة f نهاية عظمى نسبية عند نقطة $c \in D$ ، إذا وجدت $\delta > 0$ ، حيث أن $f(x) \leq f(c)$ عند $x \in D$ تحقق $|x-c|<\delta$.

ويكون للدالة نهاية صغرى نسبية بحيث أن $f(c) \leq f(x)$ عند $x \in D$ ، تحقق أن $|x-c|<\delta$.

نظرية النهاية العظمى الداخلية

نفرض ان $c \in Int(D)$ نقطة داخلية للنطاق ، والتى عندها يكون للدالة f نهاية عظمى نسبية ، إذا كانت مشتقة الدالة f موجودة عند c، فيجب أن تكون مساوية للصفر $\acute{f}(c)=0$.

نظرية رول

نفرض أن f دالة متصلة في فترة مغلقة [a,b] و أن $\grave{f}$ موجودة في الفترة المفتوحة (a,b) ، وأن $f(a)=f(b)=0$ ، عندها توجد نقطة $c \in (a,b)$ تحقق أن $\grave{f}(c)=0$.

الاستنتاج الأساسي من نظرية رول هو موضوع هذه الدراسة نظرية القيمة المتوسطة والتي تنص على ما يلي:

نظرية القيمة المتوسطة

لتكن f دالة متصلة في فترة مغلقة J=[a,b] و لها مشتقة في (a,b) ، فإنه توجد نقطة $c \in (a,b)$ بحيث أن

$$f(b)-f(a)=\acute{f}(c)(b-a)$$

البرهان

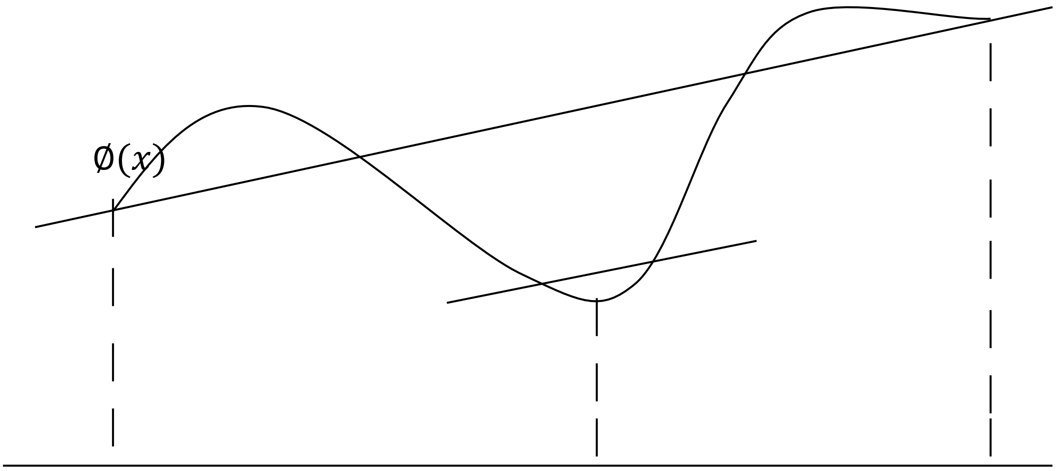
نفرض أن الدالة $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

أى أن φ الفرق بين الدالة f و الدالة التى رسمها البيانى يتكون من جزء الخط المستقيم المار بالنقطتين $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$.

ينتج من الفروض أن φ متصلة في (a,b) و لها مشتقة في (a,b) ، بالاضافة الى أن $\varphi(a) =$

$$\varphi(b) = 0$$

وباستخدام نظرية رول توجد نقطة c داخل j بحيث أنه $0 = \acute{\varphi}(c) = \acute{f}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



a b c

نتيجة 1

إذا كان للدالة f مشتقة في [a,b] ، فإنه توجد نقطة $c \in (a,b)$ حيث أن

$$f(b) - f(a) = \acute{f}(c)(b-a)$$

تم تعميم نظرية الفيمة المتوسطة لتشمل دالتين كما يتضح في نظرية كوشي:

نظرية كوشي للقيمة المتوسطة:

لتكن f و g دالتين متصلتين في [a,b] و المشتقتان $\acute{f}$ و $\acute{g}$ موجودتان في الفترة المفتوحة (a,b) ، اذن توجد نقطة $c\epsilon(a,b)$ ، بحيث أن:

$$\acute{f}(c)[g(b)-g(a)] = g\acute{(c)}[f(b)-f(a)].$$

البرهان يوجد احتمالان:

1) عندما g(a)=g(b)=0 يتحقق المطلوب باختيار c بحيث ان $\acute{g}(c) = 0$.

2) إذا كانت $g(a) \neq g(b)$ نعتبر الدالة φ المعرفة في J بأنها :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)]$$

وبتطبيق نظرية رول على φ نحصل على النتيجة المطلوبة.

النظرية التالية تبين بعض نتائج نظرية كوشي للقيمة المتوسطة:

نظرية 1

لتكن f و g دالتان متصلتان في J=[a,b]، و أن كلا من $\acute{f}$ و $\acute{g}$ موجودة في (a,b) ، فإنه:

i) إذا كانت $\acute{f}(x) = 0$ عند $a < x < b$ ، فإن f دالة ثابتة في j.

ii) إذا كانت $\acute{f}(x) = \acute{g}(x)$ لكل $x \in (a,b)$ ، فإن f و g يختلفان بمقدار ثابت في الفترة J.

III) إذا كانت $\acute{f}(x) \geq 0$ لكل $x \in (a,b)$ ، وإذا كانت $x_1 \leq x_2$ في الفترة J ، حينئذ $f(x_1) \leq f(x_2)$.

iv) إذا كانت $\acute{f}(x) \geq 0$ لكل $a < x < a + \delta$ ، فإن a نقطة نهاية صغرى نسبية للدالة f .

v) إذا كانت $f(\acute{x}) \geq 0$ لكل $b - \delta < x < b$ ، فإن b نقطة نهاية عظمى نسبية للدالة .

vi) إذا كانت $|\acute{f}(x)| \leq M$ لكل $x \in (a,b)$ ، فإن f تحقق شرط ليبشتز $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$ عند x_1،x_2 في J.

2. تطبيقات نظرية القيمة المتوسطة:

نقدم في هدا البند أهم تطبيقات نظرية القيمة المتوسطة، والمتمثلة في الحسابات التقريبية للحصول على تقييم دقيق للخطأ و تعيين مواقع الجذور لدالة، باستخدام نظرية رول وإثبات قواعد لوبيتال لحساب صيغ غير محددة باستخدام نظرية القيمة المتوسطة لكوشى

التطبيق الأول:

استخدام نظرية القيمة المتوسطة في الحسابات التقريبية للحصول على تقييم للخطأ والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال1:

ليكن المطلوب هو إيجاد قيمة $\sqrt{105}$ ، نستخدم نظرية القيمة المتوسطة كما يلى :

نفرض أن a=100 و b=105 و $f(x) = \sqrt{x}$

بما أن $\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

اذن $\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{105}-\sqrt{100}}{105-100}$

أي أن $\sqrt{105} - \sqrt{100} = \frac{5}{2\sqrt{c}}$ لعدد ما c حيث أن $100 < c < 105$

وبما أن $10 < \sqrt{c} < \sqrt{105} < \sqrt{121} = 11$

نستنتج أن $\frac{5}{2(11)} < \sqrt{105} - 10 < \frac{5}{2\sqrt{c}}$

ومنها ينتج أن $10.22 < \sqrt{105} < 10.25$ وهذا التقييم ليس دقيقا بما فيه الكفاية ويمكن تحسينه بالاستفادة من استنتاجنا أن $\sqrt{105} < 10.25$ والذى يؤدى الى أن $\sqrt{c} < 10.25$

ومما سبق يكون $0.243 < \frac{5}{2(10.25)} < \sqrt{105} - 10$

ومنها يكون أحسن تقييماً وأكثرها دقة هو $10.243 < \sqrt{105} < 10.250$.

التطبيق الثاني:

استخدام نظرية رول لتعيين مواقع جذور دالة ، ويتلخص فيما يلي:

لتكن $g(x) = \acute{f}(x)$ مشتقة الدالة f(x) ، فإنه بين أي جذرين للدالة f(x) يوجد على الأقل جذر واحد للدالة g(x).

مثال 2:

لنفرض أن $f(x) = sinx$ فإن المشتقة الأولى لها هى $g(x) = cosx$ وعليه يوجد على الأقل جذر واحد للدالة $g(x) = cosx$ بين أى جذرين للدالة $f(x) = sinx$.

و بتطبيق نظرية رول مرة أخرى على المشتقة $\acute{g}(x) = -\acute{sin}x = -f(x)$ نجد انه بين اى جذرين للدالة $g(x) = cosx$ يوجد على الأقل جذر واحد غلى الأقل للدالة= $-f$ (x) $-sinx$.

ومنها نلاحظ أن جذور الدالتين $sinx$ و $cosx$ يتداخل بعضها في بعض.

التطبيق الثالث:

استخدام نظرية القيمة المتوسطة لكوشى لأثبات قواعد لوبيتال لحساب صيغ غير محددة.

بفرض أن f و g دالتان متصلتان في [a,b] ولكل منهما مشتقة في (a,b) بحيث أن

$$f(a) = g(a) = 0$$

لكن $\acute{g}(x), g(x) \neq 0$ لكل $x \neq a$.

$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{\acute{f}(c)}{\acute{g}(c)}$ أن تحقق $a < c < b$ حيث c نقطة توجد عندها

إذا كانت $\lim_{x\to a}\frac{\acute{f}(x)}{\acute{g}(x)}$ موجودة ، ينتج ان $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \text{lm}_{x\to a}\frac{\acute{f}(x)}{\acute{g}(x)}$.

الحالة التي تصبح فيها الدوال لانهائية عند x=a أو عندما تكون $x \to \infty$ ، فإن النهائية لانهائية، أو عندما يكون لدينا دوال غير محددة لصورة اخرى يمكن معالجتها غالبا بأخذ اللوغاريتمات، الأسس، أو معالجات مشابهة.

المثال التالي استخدام نظرية القيمة المتوسطة لكوشي:

مثال 3:

لتكن $a = 0$، و نريد حساب النهاية للدالة $h(x) = x\log x$ عندما $x \to \infty$ كما يلي:

نفرض أن $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ حيث، $f(x) = logx$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ ، $x > 0$.

نفرض أن $\varepsilon > 0$ وباختيار عدد ثابت $0 < x_1 < 1$ بحيث أنه إذا كانت $0 < x < x_1$

، نحصل على أن $\left| \acute{f}(x) / \acute{g}(x) \right| < \varepsilon$.

باستخدام نظرية القيمة المتوسطة لكوشى نجد أن

$$\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}\right| = \left|\frac{\acute{f}(x_2)}{\acute{g}(x_2)}\right| < \varepsilon$$

حيث ان $0 < x < x_2 < x_1$.

بما أن $f(x) \neq 0$ و $g(x) \neq 0$ عندما $0 < x < x_1$ ، فإنه باختيار قيمة ثابتة ل x_1 يمكننا كتابة

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f(x)}{g(x)}\left[\frac{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}\right]$$

بفرض أن $x \to 0$ ، و بما أن المقدار داخل القوسين يقترب من الواحد الصحيح ، فإن

$|h(x)| = \left|\frac{f(x)}{g(x)jmlg}\right| < 2\varepsilon$ و بالتالي فإن $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$.

التطبيق الرابع:

نظرية القيمة المتوسطة ونتائجها يمكن استخدامها لتوسيع المتباينات المعروفة (كبرنولى) مثلا للقيم الصحيحة أو القياسية إلى القيم الحقيقية وكذلك لتكوين المتباينات كما في المثالين التاليين:

مثال 4:

تنص متباينة برنولى على أنه إذا كانت $1+x>0$ ، فإن $(1+x)^r \geq 1+rx$.

سنوضح أن هذه المتباينة صحيحة لأى اس $r \geq 1$ ، كما يلى:

و نجد أنه إذا كانت $-1<x<0$ فإن $\acute{f}(x)<r$ ، اما إذا كانت $x>0$ فإن $\acute{f}(x)>r$.

بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الاحتمالين ، نتحصل على ان

$(1+x)^r \geq 1+rx$ عندما $1+x>0$ ، $r \geq 1$.

بالاضافة الى أنه إذا كان $r>1$ ، فإن التساوى يحدث فقط عندما $x = 0$.

مثال 5:

نفرض أن $\propto$ عدد حقيقى يحقق أن $0<\propto<1$ ، و أن $g(x)=\propto x-x^{\propto}$

فنجد أن $\acute{g}(x)=\propto(1-x^{\propto-1})$

أي أن $\acute{g}(x)<0$ عندما $0<x<1$ ، و $\acute{g}(x)>0$ عندما $x>1$

و نتيجة لذلك نجد أنه إذا كانت $x \geq 0$ فإن $g(x) \geq g(1)$ و تكون $g(x)=g(1)$ فقط عندما $x = 1$.

لذلك نحصل على المتباينة $x^{\propto} \leq \propto x+(1-\propto)$ عندما $x \geq 0$ و $0<\propto<1$.

وإذا كانت $\propto \geq 0$ ، $b>0$ ونفرض أن $x=\frac{a}{b}$ ،نحصل على المتباينة

$$a^{\propto}b^{1-\propto} \leq \propto a+(1-\propto)b$$

وتتحقق المساواة فقط عندما $a = b$.

الخاتمة:

تم بعون الله وتوفيقه دراسة أهم تطبيقات نظرية القيمة المتوسطة في علم التفاضل والتحليل الحقيقي من خلال بعض النظريات والأمثلة الموضحة لذلك.

المراجع:

المراجع العربية:

بارتل .ر. (1982). *العناصر لتحليل حقيقي* (الطبعة الثانية)، جامعة الينوى–اريانا – شامبير.

جهيمة .ر.(2002). *التحليل الحقيقي* (الطبعة الثانية)، دار الكتب الوطنية، بنغازي– ليبيا، دار أويا للطباعة والنشر والتوزيع و التنمية. الثقافية، طرابلس – ليبيا

المراجع الأجنبية:

MARSDEN, J. E. (1974). *Elementary Classical Analysis* , San Francisco, W. H. Freeman and company.